5-7 класс

Задача 7.1.(6.1) Который час?

Сутки в Древнем Египте делились на часы следующим образом: время от рассвета до заката делилось на 12 равных дневных часов, а время от заката до рассвета — на 12 равных ночных часов. Продолжительность дневного и ночного часа, как следствие, зависела от конкретной даты измерения. В одном из древних папирусов было сказано, что некоторая важная церемония началась через два часа (дневных) после рассвета, а закончилась через час (ночной) после заката. К сожалению, точная дата этой церемонии стёрлась от времени. Найдите минимальную и максимальную продолжительность (в современных часах) этой церемонии.
Примечание: Самый длинный день начинается (в Египте) в 5:00 и заканчивается в 19:00. Самый короткий день, соответственно, начинается в 7:00 и заканчивается в 17:00.

Ответ: Минимальная продолжительность — 9,5 ч, максимальная — 12,5 ч.

Решение: Согласно папирусу, церемония длилась 10 дневных часов и 1 ночной час. Продолжительность самого короткого дня составляет 10 современных часов. Таким образом, 1 дневной час в этом случае равен 10/12 современного, а ночной — 14/12 современного. Общая продолжительность церемонии составляет

$$t_{\text{мин}} = 10 \times \frac{10}{12}\text{ ч} + \frac{14}{12}\text{ ч} = 114/12\text{ ч} = 9{,}5\text{ ч}.$$

Продолжительность самого длинного дня составляет 14 современных часов. Соответственно, 1 дневной час в этом случае равен 14/12 современного, а ночной — 10/12 современного. Общая продолжительность церемонии теперь составляет

$$t_{\text{макс}} = 10 \times \frac{14}{12}\text{ ч} + \frac{10}{12}\text{ ч} = 150/12\text{ ч} = 12{,}5\text{ ч}.$$

Таким образом, минимальная продолжительность церемонии равна 9,5 ч, а максимальная — 12,5 ч.

Критерии:

Найдена продолжительность дневного и ночного часа для самого короткого дня . . . 2 балла
Найдена продолжительность дневного и ночного часа для самого длинного дня . . . . 2 балла
Найдена минимальная продолжительность церемонии . . . . 3 балла
Найдена максимальная продолжительность церемонии . . . . 3 балла

Задача 7.2.(6.2) Газонокосильщики.

Известно, что газон футбольного поля один опытный рабочий обычно стрижёт за 8 часов. Както раз, накануне открытия сезона, потребовалось срочно постричь газон. Для ускорения процесса в пару к опытному рабочему придали ещё одного, молодого, который стрижёт вдвое медленнее. Однако оказалось, что косилка у молодого рабочего была неисправна, поэтому он смог начать работу только через час после опытного коллеги. Сколько времени в общей сложности им потребовалось, чтобы выполнить задание?

Ответ: 5 ч 40 мин.

Решение: Пусть S — площадь футбольного поля. Тогда скорость, с которой работает опытный рабочий равна $v_1 = S/(8\text{ ч})$. Молодой рабочий стрижёт вдвое медленнее, то есть со скоростью $v_2 = S/(16\text{ ч})$. Первый час опытный рабочий работал один и постриг площадь, равную $S/(8\text{ ч}) \cdot 1\text{ ч} = S/8$. Оставшиеся $7S/8$ они стригли вдвоём со скоростью $v_1 + v_2 = 3S/(16\text{ ч})$. Время, которое у них на это ушло, равно

$$t = \frac{7S/8}{3S/(16\text{ ч})} = \frac{14}{3}\text{ ч} = 4\text{ ч } 40\text{ мин}.$$

Следовательно, общее время выполнения всей работы 1 ч + 4 ч 40 мин = 5 ч 40 мин.

Критерии:

Записаны выражения для скоростей газонокосильщиков . . . . 2 балла
Найдена площадь, постиженная опытным рабочим в одиночку . . . . 2 балла
Найдено время совместной работы . . . . 4 балла
Найдено общее время работы . . . . 2 балла

Задача 7.3.(6.3) Восток — дело тонкое!

В Японии существовала единица измерения больших объёмов, называемая «ко́ку». Так, например, считалось, что одного коку риса должно хватить на год для пропитания взрослому человеку. В японской системе мер 1 коку состоял из 100 сё, а 1 сё соответствовал объёму ящика, длина и ширина которого равны 49 бу, а высота — 27 бу. Определите объём одного коку в литрах, если 1 м равен 330 бу.

Ответ: $\approx$ 180 л.

Решение: Один бу равен 1/330 м или 1/33 дм. Найдём объём в литрах одного сё:

$$1 \text{ сё} = \frac{49}{33} \cdot \frac{49}{33} \cdot \frac{27}{33} \text{ дм}^3 = \frac{64827}{35937} \text{ дм}^3 \approx 1{,}8 \text{ дм}^3 \text{ или } 1{,}8 \text{ л.}$$

Соответственно,

$$1 \text{ коку} = 100 \text{ сё} \approx 180 \text{ л.}$$

Критерии:

Бу переведён в систему СИ . . . . 2 балла
Использована правильная формула для объёма 1 сё . . . . 2 балла
Найден объём 1 сё . . . . 4 балла
Найден объём 1 коку . . . . 2 балла

Задача 7.4. Челночный бег.

Во время уборки школьной территории двое школьников понесли носилки с мусором. В это время вдоль них стал туда-сюда бегать маленький котёнок. Когда котёнок бежит навстречу ребятам, он пробегает мимо них в 1,5 раза быстрее, чем при движении в противоположном направлении. Какова скорость котёнка, если школьники идут со скоростью 0,7 м/с? Скорость котёнка одинакова в обоих случаях. Размерами котёнка можно пренебречь.

Ответ: 3,5 м/с.

Решение: Пусть L — расстояние между школьниками, u — скорость школьников, а v — скорость котёнка. Двигаясь навстречу школьникам, котёнок пробегает мимо них за время $t_1 = L/(v+u)$, а двигаясь в обратном направлении — за время $t_2 = L/(v-u)$. Так как $t_2 = 1{,}5t_1$, получаем

$$\frac{L}{v-u} = \frac{1{,}5L}{v+u} \quad \Rightarrow \quad v + u = 1{,}5(v-u) \quad \Rightarrow \quad 2{,}5u = 0{,}5v \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad v = 5u = 5 \cdot 0{,}7 \text{ м/с} = 3{,}5 \text{ м/с.}$$

Критерии:

Записано выражение для времени t_1 . . . . 3 балла
Записано выражение для времени t_2 . . . . 3 балла
Записано, что $t_2 = 1{,}5t_1$ . . . . 1 балл
Найдена скорость котёнка . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 5-6 классе 30
Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. Как я провёл лето.

Как-то летом, находясь в отпуске, Василий поехал на своём автомобиле к морю. Дорога шла через горный перевал. Подъём занял первую треть пути, и автомобиль двигался на этом участке со скоростью 24 км/ч. Затем одну шестую всего пути дорога была ровной, а оставшуюся часть пути она спускалась к морю. С какой скоростью автомобиль двигался на ровном участке, если он спускался со скоростью 750 м/мин, а его средняя скорость на всём пути составила 10 м/с?

Ответ: 60 км/ч.

Решение: Пусть s — длина пути, пройденного Василием. Тогда $s_1 = s/3$ — длина первого участка, $s_2 = s/6$ — длина второго. Длина третьего участка, соответственно, составляет

$$s_3 = s - \frac{s}{3} - \frac{s}{6} = \frac{s}{2}.$$

Время, потраченное на каждом участке и на всём пути, равно, соответственно,

$$t_1 = \frac{s/3}{v_1}, \qquad t_2 = \frac{s/6}{v_2}, \qquad t_3 = \frac{s/2}{v_3}, \qquad t = \frac{s}{v_{ср}}.$$

Так как $t_2 = t - t_1 - t_3$, получаем, что

$$\frac{s/6}{v_2} = \frac{s}{v_{ср}} - \frac{s/3}{v_1} - \frac{s/2}{v_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v_2} = \frac{6}{v_{ср}} - \frac{2}{v_1} - \frac{3}{v_3} = \frac{6}{36\text{ км/ч}} - \frac{2}{24\text{ км/ч}} - \frac{3}{45\text{ км/ч}} = \frac{1}{60\text{ км/ч}}.$$

Отсюда, $v_2 = 60$ км/ч.

Критерии:

Правильно сделан перевод к одним единицам измерения для всех скоростей . . . . . . 1 балл
Записаны выражения для s_1, s_2, s_3 . . . . 1 балл
Записаны выражения для t_1, t_2, t_3 . . . . 2 балла
Записано равенство $s = v_{ср}t$ или его аналог . . . . 2 балла
Записано уравнение для поиска v_2 . . . . 2 балла
Найдено значение v_2 . . . . 2 балла

Задача 8.2. Эксперименты с динамометром.

На крюке динамометра висят скрепленные друг с другом два тела одинаковой массы — алюминиевое (сверху) и медное (снизу). Если нижнее тело полностью погружено в керосин, динамометр показывает 6,8 Н. Определите массы обоих тел. Что покажет динамометр, если оба тела полностью погрузить в керосин? Плотность алюминия равна 2700 кг/м^3, меди — 8900 кг/м^3, керосина — 800 кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: 356 г, 5,7 Н.

Решение: Пусть m — масса одного тела. Тогда $V_1 = m/\rho_{ал}$ — объём алюминиевого тела, а $V_2 = m/\rho_{м}$ — объём медного. Динамометр показывает общий вес системы в керосине. В первом случае он равен

$$P_1 = 2mg - \rho_{к}gV_2 = 2mg - \rho_{к}g \cdot \frac{m}{\rho_{м}} = mg\left(2 - \frac{\rho_{к}}{\rho_{м}}\right) = mg\left(2 - \frac{800\text{ кг/м}^3}{8900\text{ кг/м}^3}\right) = \frac{170}{89}mg.$$

Отсюда находим массу m:

$$m = \frac{89P_1}{170g} = \frac{89 \cdot 6{,}8\text{ Н}}{170 \cdot 10\text{ Н/кг}} = 0{,}356\text{ кг} = 356\text{ г}.$$

Если в керосин погрузить оба груза, то динамометр покажет

$$P_2 = 2mg - \rho_к g(V_1 + V_2) = mg\left(2 - \frac{\rho_к}{\rho_{ал}} - \frac{\rho_к}{\rho_м}\right) =$$

$$= 0{,}356\ кг \cdot 10\ \frac{Н}{кг} \cdot \left(2 - \frac{800\ кг/м^3}{2700\ кг/м^3} - \frac{800\ кг/м^3}{8900\ кг/м^3}\right) \approx 5{,}7\ Н.$$

Критерии:

Записаны выражения для объёмов обоих тел . . . . 1 балл
Записано выражение для веса в первом случае . . . . 2 балла
Записано выражение для веса во втором случае . . . . 2 балла
Найдено значение m . . . . 2 балла
Найдено значение P_2 . . . . 3 балла

Задача 8.3. Эх, ухнем!

Рабочий Василий должен поднять груз массой 100 кг на высоту 1,2 м, используя для этого пологую наклонную плоскость — пандус. Сколько времени займёт весь подъём, если Василий тянет груз с силой, равной 250 Н, прикладывая её вдоль поверхности пандуса? Коэффициент полезного действия пандуса равен 30%, а груз перемещается со скоростью 6 м/мин? Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: 160 с.

Решение: Полезная работа по подъёму груза равна $A_{пол} = mgh = 100\ кг \cdot 10\ Н/кг \cdot 1{,}2\ м = 1200$ Дж. Работа, совершённая Василием равна $A_{сов} = A_{пол}/0{,}3 = 4000$ Дж. С другой стороны, $A_{сов} = Fvt$, где F — сила, которую прикладывает рабочий, v — скорость перемещения груза, а t — время перемещения. Отсюда

$$t = \frac{A_{сов}}{Fv} = \frac{4000\ Дж}{250\ Н \cdot 0{,}1\ м/с} = 160\ с.$$

Критерии:

Записано выражение для $A_{пол}$ . . . . 2 балла
Записано выражение для $A_{сов}$ . . . . 2 балла
Связь между $A_{пол}$ и $A_{сов}$ через КПД . . . . 2 балла
Найдено время движения . . . . 4 балла

Задача 8.4. Больше или меньше?

В цилиндрическом сосуде находится вертикальный ледяной цилиндр, вокруг которого налита вода (рис. 8.1). Высота слоя воды равна 10 см, высота ледяного цилиндра — 20 см, а площадь основания цилиндра в четыре раза меньше площади дна сосуда. Как и насколько изменится давление воды на дно сосуда, если весь лёд растает? Вода из сосуде не выливается. Плотность льда равна 900 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: Увеличится на 200 Па.

Решение: Пусть S — площадь основания цилиндра, а $h = 10$ см — первоначальная высота слоя воды. Тогда площадь дна сосуда равна $4S$, а высота цилиндра — $2h$. Начальный объём воды равен $V_0 = (4S - S)h = 3Sh$, а масса льда $m = \rho_л S \cdot 2h$. Когда лёд растает, объём получившейся из него воды станет равен $V = m/\rho_в = 1{,}8Sh$. Общий объём воды тогда составит

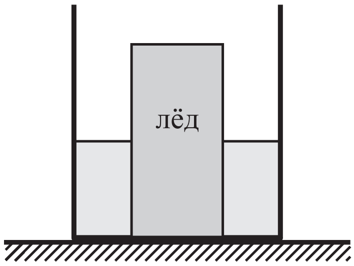


Рис. 8.1.

$V_0 + V = 4{,}8Sh$, а высота слоя воды, соответственно, будет равна $h' = (V_0 + V)/(4S) = 1{,}2h$. Так как высота увеличилась, то и давление воды на дно возрастёт. Изменение давления равно

$$\Delta p = \rho_в g \cdot 1{,}2h - \rho_в gh = 0{,}2\rho_в gh = 0{,}2 \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ Н/кг} \cdot 0{,}1 \text{ м} = 200 \text{ Па}.$$

Критерии:

Записано выражение для начального объёма воды . . . . 1 балл
Записано выражение для массы льда . . . . 1 балл
Найден объём воды, получившейся при таянии льда . . . . 2 балла
Найдена итоговая высота слоя воды . . . . 3 балла
Сделан вывод, возрастает или убывает давление . . . . 1 балл
Найдено изменение давления воды . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Часы-реостат.

Для проекта по технологии мальчик Паша изготовил «часы-реостат». На пластиковом основании он закрепил непроводящее электричество кольцо (на рис. 9.1 закрашено серым цветом), намотал на него витки проволоки, а в центре кольца поместил часовой механизм с парой металлических стрелок таким образом, что стрелки во время движения скользят по проволоке. Затем он нарисовал циферблат и прикрепил к проволоке напротив цифр «3» и «9» электрические провода для подключения измерительных приборов (см. рис. 9.1). В результате своих измерений Паша выяснил, что, когда часы показывают 6:00, сопротивление реостата равно 30 Ом. Каково станет сопротивление реостата, когда часы покажут 10:30? Сопротивлением стрелок и проводов можно пренебречь. Проволока на кольцо намотана плотно, а каждый виток отделён от соседних изоляцией.

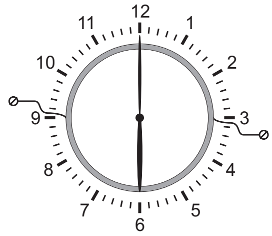


Рис. 9.1.

Ответ: 28 Ом.

Рис. 9.2.

Решение: Пусть R — сопротивление части реостата, соответствующей четверти дуги окружности (например, между «6» и «9»). Тогда, если часы показывают 6:00 (рис. 9.2а), цепь эквивалентна четырём резисторам с сопротивлением R каждый, соединённым попарно параллельно. Сопротивление каждой такой пары равно $R/2$, а общее сопротивление цепи, следовательно, равно $R/2 + R/2 = R$. Когда же часы показывают 10:30 (рис. 9.2б), цепь так же эквивалентна двум парам параллельно соединённых резисторов: первая пара состоит из резисторов с сопротивлением $R/2$ и R, вторая пара — $3R/2$ и R. Общее сопротивление такой цепи равно

$$R_2 = \frac{R/2 \cdot R}{R/2 + R} + \frac{3R/2 \cdot R}{3R/2 + R} = \frac{R}{3} + \frac{3R}{5} = \frac{14R}{15}.$$

Так как по условию задачи общее сопротивление цепи в первом случае равно 30 Ом, то $R = 30$ Ом. Поэтому $R_2 = 14R/15 = 28$ Ом.

Критерии:

Записано выражение для общего сопротивления цепи в первом случае . . . . 3 балла
Записано выражение для общего сопротивления цепи во втором случае . . . . 5 баллов
Найдено значение сопротивления во втором случае . . . . 2 балла

Задача 9.2. Тень от домика.

Экспериментатор Иннокентий Иванов как-то решил сделать новую крышу для своего дачного домика. В процессе работы он обратил внимание на то, что тень, которую отбрасывает на землю дом без крыши, на 20 см короче, чем тень от дома с новой крышей. Какова высота дачного домика (вместе с новой крышей), если остальные размеры указаны на рис. 9.3? Считать, что скаты крыши симметричны, солнечные лучи в обоих случаях падали в плоскости рисунка под углом 30° к горизонту, а поверхность земли рядом с домиком горизонтальна.

Ответ: 5,35 м.

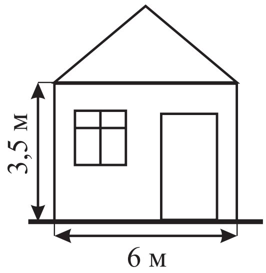


Рис. 9.3.

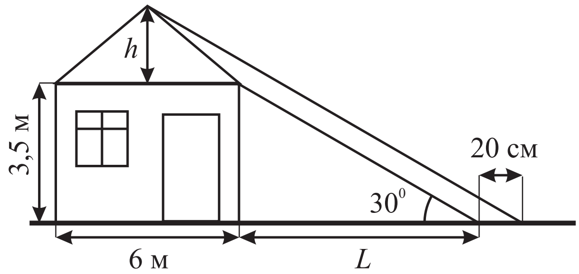


Рис. 9.4.

Решение: Пусть дом без крыши отбрасывает тень длиной L (см. рис. 9.4). Тогда дом с новой крышей (высота крыши h), будет отбрасывать тень длиной $L + 0{,}2$ м, если считать от правой стены дома. Запишем геометрические соотношения:

$$\frac{3{,}5\text{ м}}{L} = \operatorname{tg} 30^\circ, \qquad \frac{h + 3{,}5\text{ м}}{3\text{ м} + L + 0{,}2\text{ м}} = \operatorname{tg} 30^\circ.$$

Во втором случае 3 м добавляются, так как конёк крыши находится над серединой дома. Преобразуя эти соотношения, получаем

$$\begin{cases} 3{,}5\text{ м} = L \operatorname{tg} 30^\circ, \\ h + 3{,}5\text{ м} = (3\text{ м} + L + 0{,}2\text{ м}) \operatorname{tg} 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \quad h = (3\text{ м} + 0{,}2\text{ м}) \operatorname{tg} 30^\circ = 3{,}2\text{ м} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}85\text{ м}.$$

Общая высота дома с крышей равна, соответственно, $H = 3{,}5\text{ м} + 1{,}85\text{ м} = 5{,}35$ м.

Критерии:

Записано геометрическое соотношение для тени дома без крыши . . . . 2 балла
Записано геометрическое соотношение для тени дома с крышей . . . . 5 баллов
Найдена высота дома с крышей . . . . 3 балла

Задача 9.3. Неравное давление.

Горизонтальный стержень постоянного сечения, левая треть которого изготовлена из чугуна, а правые две трети — из алюминия, опирается своими концами на две опоры. С какой силой стержень давит на левую опору, если на правую он давит с силой 143 Н? Плотность чугуна равна 7 г/см^3, плотность алюминия — 2,7 г/см^3.

Ответ: 229 Н.

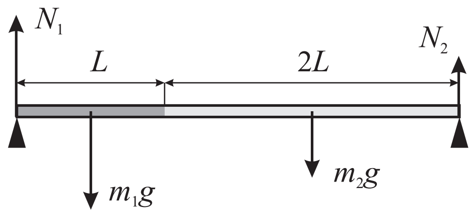


Рис. 9.5.

Решение: Пусть L — длина чугунной части, $2L$ — длина алюминиевой, а S — площадь поперечного сечения стержня. Тогда массы обеих частей равны, соответственно, $m_1 = \rho_ч SL$ и $m_2 = \rho_{ал} S \cdot 2L$. Изобразим все силы, действующие на стержень (рис. 9.5). Здесь N_1 и N_2 — силы реакции левой и правой опоры. Стержень будет в равновесии, если

$$N_1 + N_2 = (m_1 + m_2)g \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 = (\rho_ч + 2\rho_{ал})SLg.$$

Теперь запишем правило моментов относительно левой опоры:

$$N_2 \cdot 3L = m_1 g \cdot 0{,}5L + m_2 g \cdot 2L \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{1}{6}\left(\rho_ч + 8\rho_{ал}\right) SLg.$$

Из полученных соотношений находим, что

$$N_1 = \frac{1}{6}\left(5\rho_ч + 4\rho_{ал}\right) SLg \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{5\rho_ч + 4\rho_{ал}}{\rho_ч + 8\rho_{ал}} = \frac{5 \cdot 7\ г/см^3 + 4 \cdot 2{,}7\ г/см^3}{7\ г/см^3 + 8 \cdot 2{,}7\ г/см^3} = \frac{45{,}8}{28{,}6}.$$

Отсюда следует, что

$$N_1 = \frac{45{,}8}{28{,}6} N_2 = \frac{45{,}8}{28{,}6} \cdot 143\ Н = 229\ Н.$$

Критерии:

Записаны выражения для масс обеих частей . . . . 1 балл
Изображены все силы, действующие на стержень . . . . 2 балла
Записано правило моментов относительно любой точки . . . . 3 балла
Записано условие равенства сил *или* правило моментов относительно другой точки . 2 балла
Найдена величина N_1 . . . . 2 балла

Задача 9.4. Брусок в мерном сосуде. В мерном сосуде с водой находится деревянный брусок, привязанный с помощью лёгкой нити ко дну (см. рис. 9.6а). Нить аккуратно перерезают, и брусок всплывает (рис. 9.6б). Определите **с помощью рисунков** объём бруска, если он имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдите массу бруска и силу натяжения нити в первом случае. Плотность воды равна 1000 кг/м^3, ускорение свободного падения — 10 Н/кг.

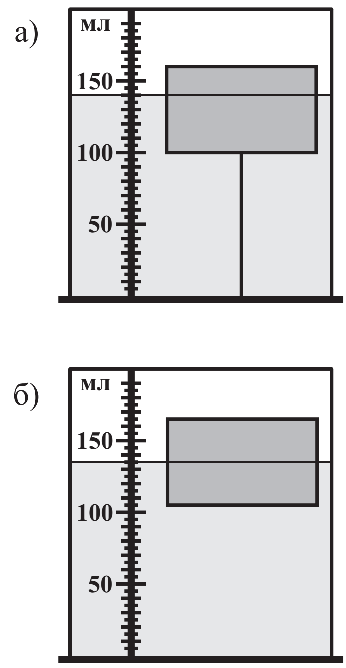


Рис. 9.6.

Ответ: 30 см^3, 15 г, 0,05 Н.

Решение: Пусть V — объём бруска. На рис. 9.6а брусок погружен на две трети своего объёма, на рис. 9.6б — наполовину (это можно определить по шкале мерного сосуда). Из этого следует, что при всплытии объём погруженной части уменьшился на $2V/3 - V/2 = V/6$. С другой стороны, уровень воды снизился от отметки 140 мл до 135 мл. Это значит, что $V/6 = 5$ мл, откуда

$$V = 30\ мл = 30\ см^3.$$

Теперь найдём плотность дерева. На рис. 9.6б он плавает, погрузившись в воду на половину своего объёма. Следовательно,

$$\rho_д g V = \rho_в g \frac{V}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho_д = \frac{1}{2}\rho_в = 500\ \frac{кг}{м^3}.$$

Масса бруска равна $m = \rho_д V = 0{,}5\ г/см^3 \cdot 30\ см^3 = 15$ г.

Вернёмся теперь к рис. 9.6а. Сила натяжения нити T равна разнице силы Архимеда и силы тяжести, действующих на брусок:

$$T = F_A - mg = \rho_в \cdot \frac{2V}{3} g - mg = 1000\ \frac{кг}{м^3} \cdot 0{,}02\ кг \cdot 10\ \frac{Н}{кг} - 0{,}015\ кг \cdot 10\ \frac{Н}{кг} = 0{,}05\ Н.$$

Критерии:

Указано, что в первом случае брусок погружен на 2/3 объёма . . . . 1 балл

Указано, что во втором случае брусок погружен на 1/2 объёма . . . . 1 балл
Найден объём бруска . . . . 2 балла
Найдена плотность дерева . . . . 2 балла
Найдена масса бруска . . . . 1 балл
Найдена сила натяжения нити . . . . 3 балла

Задача 9.5. Зима близко!

Как-то под Новый год девятиклассник Паша, изучая тепловые явления, налил в теплоизолированный калориметр воду при температуре 20 °С и довёл её до кипения с помощью встроенного нагревателя за 5 мин. Затем он повторил свой опыт, набрав в калориметр такой же объём снега при температуре −20 °С. Во втором случае содержимое калориметра закипело через 5,5 мин. Найдите среднюю плотность снега в калориметре. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг · °С), льда — 2100 Дж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда — 340 кДж/кг. *Примечание:* Снег состоит из кристалликов льда, между которыми есть воздушные полости.

Ответ: ≈ 460 кг/м³.

Решение: Пусть V — объём воды в калориметре, P — мощность нагревателя, $\rho_с$ — средняя плотность снега, а $\rho_в$ — плотность воды. Масса снега, $m_с = \rho_с V$, равна массе льда, из которого он состоит. Запишем уравнения теплового баланса. Для первого случая

$$c_в\rho_в V(100\,^\circ\text{С} - 20\,^\circ\text{С}) = P \cdot 5\ \text{мин},$$

а для второго

$$c_л\rho_с V(0\,^\circ\text{С} - (-20\,^\circ\text{С})) + \lambda\rho_с V + c_в\rho_с V(100\,^\circ\text{С} - 0\,^\circ\text{С}) = P \cdot 5{,}5\ \text{мин}.$$

Поделив эти равенства друг на друга, получаем

$$\frac{\rho_с}{\rho_в} \cdot \frac{c_л \cdot 20\,^\circ\text{С} + \lambda + c_в \cdot 100\,^\circ\text{С}}{c_в \cdot 80\,^\circ\text{С}} = 1{,}1 \quad \Rightarrow \quad \rho_с = 1{,}1\rho_в \cdot \frac{c_в \cdot 80\,^\circ\text{С}}{c_л \cdot 20\,^\circ\text{С} + \lambda + c_в \cdot 100\,^\circ\text{С}} =$$

$$= 1100\ \text{кг/м}^3 \cdot \frac{4200\ \text{Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{С)} \cdot 80\,^\circ\text{С}}{2100\ \text{Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{С)} \cdot 20\,^\circ\text{С} + 340000\ \text{Дж/кг} + 4200\ \text{Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{С)} \cdot 100\,^\circ\text{С}} \approx 460\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Критерии:

Записано уравнение теплового баланса в первом случае . . . . 3 балла
Записано уравнение теплового баланса во втором случае . . . . 4 балла
Найдено значение плотности снега . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Бах!

Молот массой 15 кг падает на лежащую на наковальне стальную пластину массой 300 г. Скорость молота перед ударом равна 10 м/с. Считая, что на нагревание пластины уходит 20% кинетической энергии молота, вычислите, на сколько градусов нагреется пластина после тридцати таких ударов. Удельная теплоёмкость стали равна 500 Дж/(кг · °C).

Ответ: 30 °C.

Решение: Кинетическая энергия молота перед ударом равна $E = Mv^2/2$, где M — масса молота, v — его скорость. После $N = 30$ ударов на нагревание, согласно условию, ушло $Q = 0{,}2 \cdot NMv^2/2$. Тогда

$$Q = c_{\text{ст}} m \Delta t \quad \Rightarrow \quad 0{,}2 \cdot \frac{NMv^2}{2} = c_{\text{ст}} m \Delta t,$$

где m — масса пластины, а Δt — общее изменение температуры. Отсюда получаем, что

$$\Delta t = \frac{0{,}2 \cdot NMv^2}{2c_{\text{ст}}m} = \frac{0{,}2 \cdot 30 \cdot 15\ \text{кг} \cdot (10\ \text{м/с})^2}{2 \cdot 500\ \text{Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)} \cdot 0{,}3\ \text{кг}} = 30\,^\circ\text{C}.$$

Критерии:

Записано выражение для энергии, переданной пластине (с учётом КПД) . . . . 4 балла
Записано уравнение теплового баланса . . . . 2 балла
Найдено изменение температуры . . . . 4 балла

Задача 10.2. Недалёкое будущее.

Маленькая ракета взлетающая с Луны, поднимается вверх с ускорением 3 м/с^2. Через 40 с после начала движения от неё отделяются пустые топливные баки. Через какое время после этого они упадут обратно на поверхность Луны? Ускорение свободного падения равно 1,6 м/с^2. Считать, что баки отделяются без толчка.

Ответ: ≈ 168 м.

Решение: Пусть a — ускорение ракеты, g — ускорение свободного падения, τ — время после старта, через которое отделились баки, t — время, через которое они после этого упали на поверхность. Через время τ скорость ракеты станет $v = a\tau$, а сама ракета поднимется на высоту $h = a\tau^2/2$. После отделения баки имеют ту же скорость v, направленную вверх. Так как через время t баки должны возвратиться на поверхность

$$0 = h + vt - \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau t - \frac{gt^2}{2}.$$

Решая это уравнение, получаем

$$t = \frac{\tau\left(a \pm \sqrt{a^2 + ag}\right)}{g}.$$

В этом выражении берём знак «плюс», чтобы выбрать положительное решение. В итоге,

$$t = \frac{\tau\left(a + \sqrt{a^2 + ag}\right)}{g} = 40\ \text{с} \cdot \frac{3\ \text{м/с}^2 + \sqrt{(3\ \text{м/с}^2)^2 + 3\ \text{м/с}^2 \cdot 1{,}6\ \text{м/с}^2}}{1{,}6\ \text{м/с}^2} \approx 168\ \text{м}.$$

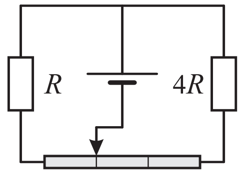
Критерии:

Найдена высота подъема ракеты h через время τ . . . . 1 балл

Найдена скорость ракеты υ через время τ . . . . 1 балл
Указано, что скорость баков сразу после отделения равна υ . . . . 2 балла
Записана формула $0 = h + \upsilon t - gt^2/2$ или её аналог . . . . 3 балла
Найдено время t . . . . 3 балла

Задача 10.3. Переключатель мощности.
Цепь, изображённая на рис. 10.1, состоит из источника постоянного напряжения, двух резисторов и реостата. Сопротивление левого резистора в четыре раза меньше, чем сопротивление правого. Если движок реостата находится в таком положении, как показано на рис. 10.1а, мощность, выделяющаяся на левом резисторе, равна 9 Вт, а на правом — 4 Вт. Какие мощности будут выделяться на резисторах, если движок реостата переместить в положение, изображённое на рис. 10.1б? Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь. Для удобства на рисунках реостат разделён на равные по длине части.

Ответ: На левом резисторе — 4 Вт, на правом — 5,76 Вт.

а) 

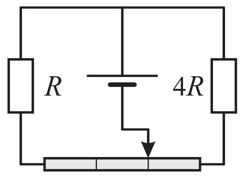
б) 

Рис. 10.1.

Решение: На рис. 10.1 реостат разделён на три равные части. Обозначим r сопротивление одной такой части. Токи через левый и правый резисторы в первом случае равны $I_{л1} = U/(R + r)$ и $I_{п1} = U/(4R + 2r)$, а мощности, выделяющиеся на них, выражаются следующими формулами:

$$P_{л1} = I_{л1}^2 R = \frac{U^2 R}{(R+r)^2}, \qquad P_{п1} = I_{п1}^2 \cdot 4R = \frac{4U^2 R}{(4R+2r)^2} = \frac{U^2 R}{(2R+r)^2}.$$

Так как по условию $P_{л1} = 9$ Вт, $P_{п1} = 4$ Вт,

$$\frac{P_{л1}}{P_{п1}} = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{(2R+r)^2}{(R+r)^2} = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{2R+r}{R+r} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad r = R.$$

Во втором случае $I_{л2} = U/(R + 2r) = U/(3R)$ и $I_{п2} = U/(4R + r) = U/(5R)$,

$$P_{л2} = I_{л2}^2 R = \frac{U^2}{9R}, \qquad P_{п2} = I_{п2}^2 \cdot 4R = \frac{4U^2}{25R}.$$

Так как $P_{л1} = U^2/(4R) = 9$ Вт, получаем, что

$$P_{л2} = \frac{4}{9} P_{л1} = 4 \text{ Вт}, \qquad P_{п2} = \frac{16}{25} P_{л1} = 5{,}76 \text{ Вт}.$$

Критерии:
Записаны выражения для токов через резисторы в первом случае . . . . 1 балл
Записаны выражения для мощностей в первом случае . . . . 2 балла
Записаны выражения для токов через резисторы во втором случае . . . . 1 балл
Записаны выражения для мощностей во втором случае . . . . 2 балла
Найдено сопротивление части реостата (или всего реостата) . . . . 2 балла
Найдены мощности в втором случае . . . . 2 балла

Задача 10.4. Тянем быстрее.
Если брусок массой $m = 8$ кг, лежащий на горизонтальной поверхности, тянуть с постоянной горизонтальной силой $F = 60$ Н, он переместится на некоторое заданное расстояние вдвое быстрее, чем если бы его тянули с силой $F/2$. Каков коэффициент трения между бруском и плоскостью? Брусок в начальный момент покоился. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 0,25.

Решение: Пусть μ — коэффициент трения между бруском и поверхностью, а s — расстояние, на которое перемещается брусок. Так как в обоих случаях начальная скорость бруска нулевая

$$s = \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{a_2 t_2^2}{2},$$

где a_1 и a_2 — ускорения бруска, t_1 и t_2 — время его движения в обоих случаях. Поскольку $t_2 = 2t_1$, отношение ускорений равно $a_1/a_2 = 4$. Найдём теперь эти ускорения:

$$ma_1 = F - \mu mg \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{F}{m} - \mu g,$$

$$ma_2 = \frac{F}{2} - \mu mg \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{F}{2m} - \mu g.$$

Отсюда получаем, что

$$a_1 = 4a_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{m} - \mu g = 4\left(\frac{F}{2m} - \mu g\right) \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{F}{3mg} = \frac{60\ \text{Н}}{3 \cdot 8\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2} = 0{,}25.$$

Критерии:

Найдено отношение ускорений в первом и втором случае . . . . 3 балла
Найдено выражение для a_1 . . . . 2 балла
Найдено выражение для a_2 . . . . 2 балла
Найден коэффициент трения . . . . 3 балла

Задача 10.5. Пластик бывает разный!

Два груза одинакового объёма, но сделанные из разных видов пластика, подвесили на однородном рычаге, опустив их в масло. Если это сделать так, как показано на рис. 10.2а, то система окажется в равновесии, когда оба груза погружены в воду наполовину. Если же их перевесить так, как изображено на рис. 10.2б, равновесие наступит, когда правый груз погружен полностью, а левый — только на одну пятую своего объёма. Определите плотности материалов, из которых сделаны грузы. Для удобства рычаг на рисунке разделён на равные по длине части. Плотность масла равна 900 кг/м³.

а) б)

Рис. 10.2.

Ответ: 840 кг/м³, 1230 кг/м³.

Решение: Пусть $\rho_\text{л}$ — плотность левого груза, $\rho_\text{п}$ — плотность правого, V — объём груза. Ве́сы грузов в первом случае равны

$$P_{\text{л}1} = \rho_\text{л} V g - \rho_\text{м} g \frac{V}{2} = \left(\rho_\text{л} - \frac{\rho_\text{м}}{2}\right) V g, \qquad P_{\text{п}1} = \rho_\text{п} V g - \rho_\text{м} g \frac{V}{2} = \left(\rho_\text{п} - \frac{\rho_\text{м}}{2}\right) V g,$$

а во втором —

$$P_{\text{л}2} = \rho_\text{л} V g - \rho_\text{м} g \frac{V}{5} = \left(\rho_\text{л} - \frac{\rho_\text{м}}{5}\right) V g, \qquad P_{\text{п}2} = \rho_\text{п} V g - \rho_\text{м} g V = \left(\rho_\text{п} - \rho_\text{м}\right) V g.$$

Запишем правило моментов относительно точки подвеса в обоих случаях (x — длина одного деления на рычаге):

$$\begin{cases} P_{л1} \cdot 2x = P_{п1} x, \\ P_{л2} x = P_{п2} \cdot 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\rho_л - \rho_м/2\right) Vg \cdot 2x = \left(\rho_п - \rho_м/2\right) Vgx, \\ \left(\rho_л - \rho_м/5\right) Vgx = \left(\rho_п - \rho_м\right) Vg \cdot 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\rho_л - \rho_м = \rho_п - \rho_м/2, \\ \rho_л - \rho_м/5 = 2\rho_п - 2\rho_м. \end{cases}$$

Решая получившуюся систему, находим, что

$$\rho_л = \frac{14}{15}\rho_м = 840\ \frac{кг}{м^3}, \qquad \rho_п = \frac{41}{30}\rho_м = 1230\ \frac{кг}{м^3}.$$

Критерии:

Записаны выражения для весов грузов в первом случае . . . . 2 балла
Записаны выражения для весов грузов во втором случае . . . . 2 балла
Записано правило моментов в обоих случаях . . . . 2 балла
Записана правильная система для нахождения плотностей . . . . 2 балла
Найдены плотности грузов . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Гелий с подогревом.
В теплоизолированном сосуде объёмом 10 л, содержащем гелий при температуре 27 °C и давлении 100 кПа, находится электрический нагреватель. До какой температуры нагреется газ, если нагреватель на 1 мин подключить к источнику с постоянным напряжением 24 В? Каким станет при этом давление гелия в сосуде? Сопротивление нагревателя равно 36 Ом. Объёмом нагревателя можно пренебречь.

Ответ: до 219 °C = 492 К, 164 кПа.

Решение: Так как объём сосуда не меняется, теплота, подводимая к газу, идёт на увеличение его внутренней энергии. Количество теплоты Q, отданное нагревателем, равно $Q = U^2t/r$, где U — напряжение источника, r — сопротивление нагревателя, а t — время нагревания:

$$Q = \frac{U^2t}{r} = \frac{(24\text{ В})^2 \cdot 60\text{ с}}{36\text{ Ом}} = 960\text{ Дж}.$$

С другой стороны, $Q = 3/2 \cdot \nu R(T - T_0)$, где ν — количество вещества, R — универсальная газовая постоянная, T — конечная температура гелия, $T_0 = 300$ К — начальная температура гелия. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона, $p_0V = \nu RT_0$ (p_0 — начальное давление гелия в сосуде, V — объём сосуда), поэтому

$$Q = \frac{3}{2}\nu R(T - T_0) = \frac{3p_0V}{2T_0}(T - T_0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = T_0\left(1 + \frac{2Q}{3p_0V}\right) = 300\text{ К}\left(1 + \frac{2 \cdot 960\text{ Дж}}{3 \cdot 10^5\text{ Па} \cdot 10^{-2}\text{ м}^3}\right) = 492\text{ К} = 219\,^\circ\text{C}.$$

Давление, получившееся после нагревания, равно

$$p = p_0 \cdot \frac{T}{T_0} = 164\text{ кПа}.$$

Критерии:
Найдено количество теплоты, отданное нагревателем . . . . 2 балла
Записано 1-ое начало термодинамики для изохорного процесса . . . . 2 балла
Записано уравнение Менделеева-Клапейрона для начального состояния . . . . 2 балла
Найдена конечная температура . . . . 2 балла
Найдено конечное давление . . . . 2 балла

Задача 11.2. Кантование куба.
Рабочие пытаются опрокинуть лежащий на шероховатой горизонтальной поверхности однородный куб массой m, привязав трос к его верхнему ребру. С какой минимальной силой F им нужно тянуть трос в тот момент, когда нижняя грань куба составляет угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтальной поверхностью (см. рис. 11.1)? Считать, что трос в этот момент тоже горизонтален, а куб по поверхности не проскальзывает.

Ответ: $mg/(2\sqrt{3})$.

Решение: Изобразим силы, действующие на куб (рис. 11.2). Здесь N — сила реакции опоры, $F_{\text{тр}}$ — сила трения между ребром куба и поверхностью, а точка C — центр куба. Диагональ куба OC наклонена к горизонтали под углом $\alpha + 45^\circ = 60^\circ$. Запишем правило моментов относительно точки O:

$$mg \cdot OC\cos 60^\circ = F \cdot 2 \cdot OC\sin 60^\circ.$$

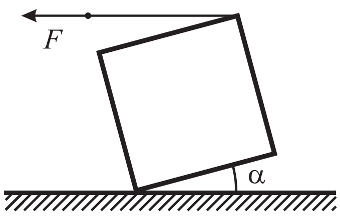


Рис. 11.1.

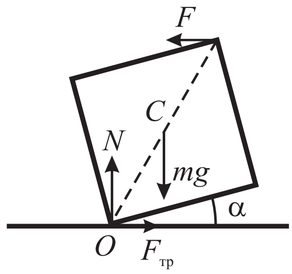


Рис. 11.2.

Отсюда получается, что

$$F = \frac{mg}{2\,\mathrm{tg}\,60^\circ} = \frac{mg}{2\sqrt{3}}.$$

Критерии:

Изображены все силы, действующие на куб . . . . 2 балла
Найден угол между диагональю и поверхностью (или аналог) . . . . . 2 балла
Записано правило моментов . . . . 4 балла
Найдена сила F . . . . 2 балла

Задача 11.3. Проверять надо!

Как-то раз мальчик Паша решил зарядить конденсатор ёмкостью C. Для этого он взял батарейку с ЭДС, равной $\mathscr{E}$, и подсоединил конденсатор к ней. Однако Паша не учёл два обстоятельства: во-первых, конденсатор уже был заряжен до напряжения $\mathscr{E}/2$, а во-вторых, при соединении «плюс» конденсатора оказался соединён с «минусом» батарейки. Какой заряд протечёт через батарейку в процессе перезарядки конденсатора? Какое количество теплоты выделится при этом в цепи?

Ответ: $\Delta q = 3C\mathscr{E}/2$, $Q = 9C\mathscr{E}^2/8$.

Решение: Начальный заряд на конденсаторе равен $q_0 = C\mathscr{E}/2$. Если конденсатор подключить к батарейке с ЭДС $\mathscr{E}$, его заряд станет $q = C\mathscr{E}$. Заряд, который протечёт через батарейку, равен изменению заряда на конденсаторе $\Delta q = q_0 + q = 3C\mathscr{E}/2$ (знак «плюс» связан с изменением полярности конденсатора). Начальная и конечная энергии конденсатора равны, соответственно, $W_1 = C\mathscr{E}^2/8$ и $W_2 = C\mathscr{E}^2/2$, а работа источника $A = \Delta q\mathscr{E} = 3C\mathscr{E}^2/2$. Эта работа идёт на изменение энергии конденсатора и тепло:

$$A = (W_2 - W_1) + Q \quad \Rightarrow \quad \frac{3C\mathscr{E}^2}{2} = \left(\frac{C\mathscr{E}^2}{2} - \frac{C\mathscr{E}^2}{8}\right) + Q \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{9C\mathscr{E}^2}{8}.$$

Критерии:

Найдены начальный и конечный заряды конденсатора . . . . 1 балл
Найден заряд, прошедший через батарейку . . . . 1 балл
Найдены начальная и конечная энергии конденсатора . . . . 1 балл
Найдена работа источника . . . . 2 балла
Записано уравнение $A = (W_2 - W_1) + Q$ . . . . 3 балла
Найдено значение Q . . . . 2 балла

Задача 11.4. Тянем и отпускаем.

Брусок массой $m = 2{,}5$ кг, лежащий на горизонтальной поверхности, тянут направо, прикладывая к нему горизонтальную силу $F = 40$ Н (см. рис. 11.3). Через время τ после начала движения действие силы прекращается, и после этого ещё через время 4τ брусок останавливается. Каков коэффициент трения между бруском и плоскостью? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

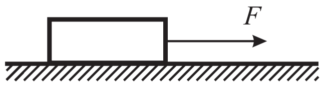


Рис. 11.3.

Ответ: 0,32.

Решение: Пусть μ — коэффициент трения между бруском и горизонтальной поверхностью. Во время разгона на брусок (в горизонтально направлении) действуют две силы — сила F и сила трения $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Найдём скорость бруска v в конце разгона:

$$\begin{cases} ma_1 = F - \mu mg, \\ a_1 = (v - 0)/\tau \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v = \left(\frac{F}{m} - \mu g\right)\tau.$$

Торможение бруска проходит только под действием силы трения, поэтому

$$\begin{cases} ma_2 = -\mu mg, \\ a_2 = (0 - v)/(4\tau) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v = 4\mu g\tau.$$

Отсюда получаем, что

$$\left(\frac{F}{m} - \mu g\right)\tau = 4\mu g\tau \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{F}{5mg} = \frac{40\text{ Н}}{5 \cdot 2{,}5\text{ кг} \cdot 10\text{ м/с}^2} = 0{,}32.$$

Критерии:

Записан 2-й закон Ньютона в случае разгона бруска . . . . 3 балла
Записан 2-й закон Ньютона в случае торможения . . . . 1 балл
Найдены ускорения в обоих случаях . . . . 1 балл
Найдена скорость с конце разгона . . . . 2 балла
Найдено μ . . . . 3 балла

Задача 11.5. Преломление в неизвестной жидкости.

Луч света падает на поверхность раздела воздуха и неизвестной прозрачной жидкости под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = 3/5$). Оказалось, что если увеличить угол падения луча на 45°, угол преломления увеличится вдвое. Определите, чему равен показатель преломления неизвестной жидкости.

Ответ: $n = 9/\sqrt{34} \approx 1{,}54$.

Решение: Пусть β — угол преломления луча, падающего под углом α, а n — показатель преломления неизвестной жидкости. Тогда, по закону Снеллиуса,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

С другой стороны, во втором случае

$$\frac{\sin(\alpha + 45^\circ)}{\sin 2\beta} = n.$$

Приравнивая левые части этих выражений, получаем, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha + 45^\circ)}{\sin 2\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin\alpha + \cos\alpha)}{2\sin\beta\cos\beta} \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \operatorname{ctg}\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Теперь, используя тригонометрические тождества, находим

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{34}}, \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда следует, что

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{9}{\sqrt{34}} \approx 1{,}54.$$

Критерии:

Записан закон Снеллиуса для первого случая . . . . 1 балл
Записан закон Снеллиуса для второго случая . . . . 2 балла
Найден $\sin\alpha$ . . . . 1 балл
Найдено значение любой тригонометрической функции от β . . . . 4 балла
Найден $\sin\beta$ . . . . 1 балл
Найдено значение n . . . . 1 балл

Максимально возможный балл в 11 классе 50